

Lösungsvorschläge zur 9. Übung

Aufgabe 36

Man betrachte folgende Abbildung:

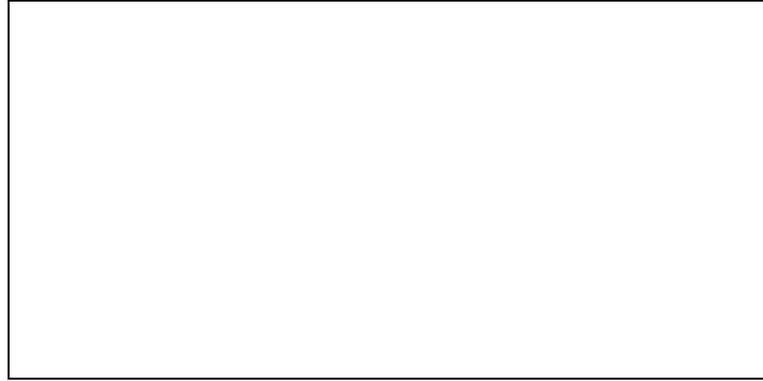


Abb.1 zur Aufgabe 36

Sei p ein beliebiger Knoten im Baum mit zwei Kindern. Der Nachfolger von p liegt nach Definition des Successor-Algorithmus im rechten Teilbaum. Sei q dieser Nachfolger. Annahme: q hat ein linkes Kind k . Dann gilt, weil k im linken Teilbaum von q liegt: $key(k) < key(q)$. Außerdem gilt, weil k im rechten Teilbaum von p liegt: $key(p) < key(k)$. Demnach ist

$$key(p) < key(k) < key(q)$$

d.h. der Schlüssel von k *zwischen* den von p und q . Dann kann aber q nicht der direkte Successor von p sein. Widerspruch! Der andere Fall für den linken Sohn von p ist symmetrisch.

Achtung: die obigen Aussagen sind nur richtig, weil alle Schlüssel als verschieden angenommen wurden. Kommen gleiche Schlüssel vor, so gehen u.U. die Ungleichungen von $<$ in \leq über und es resultiert nicht notwendigerweise ein Widerspruch.

Aufgabe 37

Sei n die Anzahl der inneren Knoten. Die wenigsten inneren Knoten hat ein RS-Baum, wenn er nur aus schwarzen Knoten besteht. In diesem Fall ist die Schwarz-Höhe $bh(T)$ identisch mit der normalen Höhe $h(T)$. Es ergibt sich $n \geq 2^{bh(T)} - 1$.

Die meisten inneren Knoten hat der RS-Baum, wenn er 'schichtenweise' aus abwechselnd roten und schwarzen Blättern aufgebaut ist. Man kann auf diese Weise bei gleicher Schwarz-Höhe die tatsächliche Höhe des Baumes verdoppeln: $h(T) = 2bh(T)$. Damit folgt die maximale Anzahl an inneren Knoten: $n \leq 2^{2bh(T)} - 1$.

Aufgabe 39

Zur Kontrolle sind im folgenden alle Schritte verzeichnet. Rote Knoten sind fett umrandet.



Abb.2 Einfügevorgänge

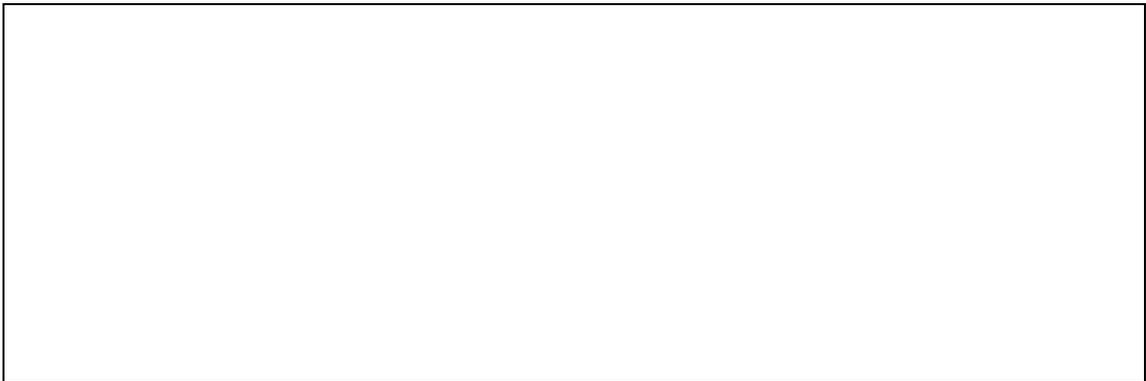


Abb.3 Löschvorgänge

Aufgabe 40

Sei im folgenden n die Anzahl der Knoten.

zu a)

Trick bei der Aufgabe ist zu sehen, daß Φ Lösung der quadratischen Gleichung

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \tag{1}$$

ist. Dies erhält man durch nachrechnen! Es ist nun zu zeigen:

$$\bigwedge_{n \geq 1} \Phi^{n-2} \leq F_n \leq \Phi^{n-1} \tag{2}$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n .

Verankerung für $n = 1$ und $n = 2$

Es muß zweimal verankert werden, da wir später im Induktionsschritt für n auf die Aussagen von $n - 1$ und $n - 2$ zurückgreifen müssen. Φ Einsetzen und für beide Fälle nachrechnen!

Induktionsschritt $(n - 2), (n - 1) \implies n$

Gelte die Aussage für $n - 2$ und $n - 1$, d.h.

$$\Phi^{n-4} \leq F_{n-2} \leq \Phi^{n-3} \quad (3)$$

$$\Phi^{n-3} \leq F_{n-1} \leq \Phi^{n-2} \quad (4)$$

Durch Addition von (3) und (4) sowie durch Ausklammern von Φ^{n-4} (links) bzw. Φ^{n-3} (rechts) erhält man:

$$\Phi^{n-4} \underbrace{(1 + \Phi)}_{\stackrel{!}{=} \Phi^2} \leq \underbrace{F_{n-1} + F_{n-2}}_{F_n} \leq \Phi^{n-3} \underbrace{(1 + \Phi)}_{\stackrel{!}{=} \Phi^2}$$

Demnach gilt die Aussage (2) auch für n . \square

zu b)

Die maximale Anzahl an Knoten hat ein AVL-Baum, wenn er einen vollen binären Baum darstellt, d.h.

$$n \leq 2^{h+1} - 1 \quad (5)$$

Für die minimale Anzahl benutzt man die Folge der Fibonacci-Zahlen und folgende Überlegungen für die Durchführung einer Induktion.



Abb.4 Bildungsvorschrift für minimale AVL-Bäume

- Für einen Baum der Höhe 0 gibt es nur eine Möglichkeit (siehe Abb.4a).
- Für einen Baum der Höhe 1 gibt es nur zwei Möglichkeiten, die allerdings symmetrisch sind (siehe Abb.4b).
- Für einen Baum der Höhe k mit Wurzel und Teilbäumen T_l und T_r betrachte Abb.4c. Eine der beiden Teilbäume muß die Höhe $k - 1$ haben (hier oBdA T_l). Der andere Teilbaum kann entweder die Höhe $k - 1$ oder $k - 2$ haben, damit die Voraussetzung der AVL-Struktur erfüllt ist. Wir sind jedoch an der *minimalen* Knotenanzahl interessiert. Deswegen werden wir den *kleineren* Teilbaum mit Höhe $k - 2$ nehmen. Der minimale Teilbaum der Höhe k setzt sich demnach rekursiv zusammen aus den minimalen Teilbäumen der Höhen $k - 1$ und $k - 2$.

Führt man obige Vorschrift für einige kleine Höhen durch, so erhält man für die minimale Anzahl $n(h)$:

$$n(h) \geq F_{h+3} - 1 \quad (6)$$

Beweis durch vollständige Induktion über die Höhe h .

Verankerung für $h = 0$ und $h = 1$

Der minimale Baum der Höhe 0 hat einen Knoten und es gilt $F_{0+3} - 1 = 2 - 1 = 1$. Der minimale Baum der Höhe 1 hat zwei Knoten und es gilt $F_{1+3} - 1 = 3 - 1 = 2$.

Induktionsschritt für $(h - 2), (h - 1) \implies h$

Sei Höhe h beliebig aber fest gegeben. Nach obiger Überlegung erhält man den minimalen Baum dieser Höhe, in dem man die minimalen Bäume für die Höhen $h - 1$ und $h - 2$ als Teilbäume an die neue Wurzel anhängt. Es gilt:

$$\begin{aligned} n(h) &\geq n(h - 1) + n(h - 2) + 1 \\ &\stackrel{I.V.}{\geq} F_{h-1+3} - 1 + F_{h-2+3} - 1 + 1 \\ &= \underbrace{F_{h-2+3} + F_{h-2+3}}_{F_{h+3}} - 1 \end{aligned}$$

Damit gilt (6) für h .

zu c)

Die Aussage dieser Teilaufgabe erhält man durch Umformen und Logarithmieren der Ungleichungen (5) und (6). Desweiteren benutzt man die Identität:

$$\log_{\Phi}(x) = \log_{\Phi}(2) \log_2(x)$$

sowie die linke Seite der Ungleichung (2)

$$F_{h+3} \geq \Phi^{h+1}$$