Lösungsvorschläge zur 8. Übung

Aufgabe 31

Zur Kontrolle:

Fach	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
linear	59			15	4	28	17	31	88		10	22
quadratisch	17	59		15	4	22	88	31			10	28
double				15	4	17	28	31	88	59	10	22

Aufgabe 32

zu a)

Führt man die angegebene Iterationsvorschriften für i und j aus, so kommt man für die Hash–Funktion auf folgende Reihe:

$$\begin{aligned} h(k,0) &= h'(k) \\ h(k,1) &= (h'(k)+1) \bmod m \\ h(k,2) &= ((h'(k)+1) \bmod m + 2) \bmod m \end{aligned}$$

Vertauscht man die Reihenfolge für die Restbildung (siehe letzte Übung) so erhält man allgemein:

$$\begin{aligned} h(k,i) &= \left(h'(k) + \sum_{j=0}^{i} j\right) \bmod m \\ &= \left(h'(k) + \frac{i(i+1)}{2}\right) \bmod m \\ &= \left(h'(k) + c_1 i + c_2 i^2\right)\right) \bmod m \end{aligned}$$

mit $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$.

zu b) (Lösung von Jochen Kneiphof)

Zuerst ist zu bemerken, daß der Schlüssel k für den gesamten Sondierungsvorgang gleich bleibt. Daher braucht man statt der Hash–Funktion $h_p(k,i) = (h'(k) + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i^2) \bmod m$ nur die Funktion

$$\tilde{h}_p(i) = \left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i^2\right) \bmod m$$

zu betrachten. Es wird durch Induktion über p mit $m = 2^p$ gezeigt, daß die Funktionenfamilie

$$\tilde{h}_p : \{0, \ldots, m-1\} \longrightarrow \{0, \ldots, m-1\}$$

surjektiv ist und damit die Aufgabenstellung erfüllt.

Induktionsverankerung ($p = 1$)

$$\tilde{h}(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \tilde{h}(1) = 1$$

Induktionsschluß $(p-1 \Longrightarrow p)$

Sei nun p beliebig aber fest gegeben. Wir müssen alle Elemente der Zielmenge $\{0,\ldots,m-1\}$ erreichen! *1. Fall:* sei $t \in \{0,\ldots,\frac{m}{2}-1\}$. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir ein $k \in \{0,\ldots,\frac{m}{2}-1\}$, so daß $\tilde{h}_{p-1}(k) = t$. Das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{2}(k+k^2) = t + q\frac{m}{2} \qquad \text{mit} \quad q \in N_0$$

Daraus folgt wiederum

$$\underbrace{\frac{1}{2}(k+k^2) \bmod m}_{\tilde{h}_p(k)} = \begin{cases} t & \text{für } q \text{ gerade} \\ t+\frac{m}{2} & \text{für } q \text{ ungerade} \end{cases}$$

Im geraden Fall sind wir fertig. Im ungeraden Fall wählen wir $\tilde{k} := k + \frac{m}{2}$. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_p(\tilde{k}) &= \left(\frac{1}{2}\tilde{k} + \frac{1}{2}\tilde{k}^2\right) \bmod m \\
&= \left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}k + \frac{1}{2}k^2\right) \bmod m}_{t+\frac{m}{2}} + \frac{m}{2} \bmod m + \underbrace{km \bmod m}_{0} + \underbrace{\frac{m^2}{4} \bmod m}_{0 \text{ für } p \geq 2} \right) \bmod m \\
&= \left(t + \frac{m}{2} + \frac{m}{2}\right) \bmod m \\
&= t
\end{aligned}$$

Also wurde ein k bzw. $\tilde{k}$ aus $\{0,\ldots,m-1\}$ gefunden mit $\tilde{h}_p(k) = t$ bzw. $\tilde{h}_p(\tilde{k}) = t$. Der *2. Fall* mit $t \in \{\frac{m}{2},\ldots,m-1\}$ geht analog. $\square$

Aufgabe 33

Abb.1 Konstruierter Baum

Die Lösung ist eindeutig (siehe 34).

Aufgabe 34

inorder–preorder

Bewiesen wird dieser Fall als Induktion über die Anzahl n von Knoten im Baum.

Verankerung $(n = 1)$

Der Baum mit einem Knoten ist wohl eindeutig aus inorder– und preorder–Durchmusterungen konstruierbar!

Induktionsschritt $(1, \ldots, n \Longrightarrow n+1)$

Sei ein binärer Baum (dessen Struktur wir natürlich nicht kennen!) mit $n+1$ Knoten beliebig aber fest gegeben und sei $(p_1 p_2 \ldots p_n)$ seine preorder– und $(i_1 i_2 \ldots i_n)$ seine inorder–Durchmusterung. Wir wissen aus der Definition der preorder–Durchmusterung, daß p_1 die Wurzel des Baumes ist mit Unterbäumen U_l und U_r. Nun suchen wir die Wurzel in der inorder–Durchmusterung, also dasjenige k, für das gilt

$$p_1 = i_k.$$

Außerdem wissen wir wiederum aus den Definitionen von inorder und preorder:

$(i_1 \ldots i_{k-1})$	ist inorder–Durchmusterung von U_l
$(i_{k+1} \ldots i_n)$	ist inorder–Durchmusterung von U_r
$(p_2 \ldots p_k)$	ist preorder–Durchmusterung von U_l
$(p_{k+1} \ldots p_n)$	ist preorder–Durchmusterung von U_r

Es muß dabei beachtet werden, daß linker und/oder rechter Unterbaum auch leer sein können, wenn $k = 1$ bzw. $k = n$. Beide Unterbäume haben höchstens $n - 1$ Knoten. Wir können nun mithilfe der Induktionsvoraussetzung die Unterbäume eindeutig rekonstruieren. Damit haben wir aus der Wurzel des Baumes, dem linken und dem rechten Unterbaum eindeutig den Gesamtbaum konstruiert. $\square$

inorder–postorder

Dieser Fall ist analog zum ersten. Die Wurzel steht in p_n und die postorder–Durchmusterungen der Unterbäume lauten:

$(p_1 \ldots p_{k-1})$	ist postorder–Durchmusterung von U_l
$(p_k \ldots p_{n-1})$	ist postorder–Durchmusterung von U_r

preorder–postorder

Die Rekonstruktion ist nicht möglich. Gegenbeispiel: die folgenden beiden Bäume haben beide gleiche preorder–Durchmusterung (AB) bzw. postorder–Durchmusterung (BA):

Abb.2 Gegenbeispiel

Aufgabe 35

Man sieht leicht, daß die neue Durchlaufordnung die postorder–Durchmusterung gerade umdreht. Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Anzahl n der Knoten im Baum.

Induktionsverankerung ($n = 1$)

Alle Durchmusterungen sind identisch für den Baum mit einem Knoten!

Induktionsschritt ($1, \ldots, n-1 \Longrightarrow n$)

Sei ein Baum mit n Knoten gegeben. Dieser habe die Wurzel w und die Teilbäume T_l und T_r. Desweiteren sei

$$(l_1 \ldots l_p r_1 \ldots r_q w) \tag{1}$$

die postorder–Durchmusterung dieses Baumes, wobei $(l_1 \ldots l_p)$ die postorder–Durchmusterung von T_l und $(r_1 \ldots r_q)$ die postorder–Durchmusterung von T_r ist. Beide Unterbäume haben höchstens $n-1$ Knoten, so daß für diese die Induktionsvoraussetzung angewandt werden darf. Demnach dreht die neue Durchlaufordnung die Durchmusterungen der beiden Unterbäume gerade um zu $(l_p \ldots l_1)$ für U_l und $(r_q \ldots r_1)$ für U_r. Nach der Vorschrift der neuen Durchlaufordnung werden diese beiden Durchmusterungen mit der Wurzel zusammengesetzt zu:

$$(w r_q \ldots r_1 l_p \ldots l_1)$$

also genau die umgekehrte Reihenfolge von (1). $\square$