12 Übung Informatik I

Marcus Rickert

30. Dezember 1995

Aufgabe 1

Achtung: gemeingefärliche Indices

Für $k = 1$ ist die Aussage falsch, denn man braucht nur eine Marke, um eine einzelne Quelle zu belegen. Sei im folgenden $k > 1$ vorgegeben. Es wird wie folgt durch nummeriert:

- der erste Index $i \in \{1, \ldots, k\}$ bezeichnet die Ebene (beginnend mit der obersten) und
- der zweite Index $j \in \{1, \ldots, i\}$ die Spalte innerhalb dieser Zeile.

Der Graph wird nun wie folgt belegt:

- Belege den Punkt $p_{k,1}$ (links unten)
- Belege den Punkt, der zwei Vorgänger hat, sonst denjenigen von dem ein Nachfolger schon einen Vorgänger hat.
- Entferne die Marken der Punkte, wo *beide* Nachfolger belegt sind.
- Wiederhole ab Schritt 2 bis die Spitze $p_{1,1}$ erreicht wird.

Führt man obige Schritte aus, so erhält man folgende Belegungsreihenfolge:

- Der Punkt $p_{k,1}$ wird belegt
- Die Diagonale $p_{k-1,1}$ bis $p_{k,2}$ wird belegt
- Die kleine 2-Pyramide, die sich aus diesen drei Punkten ergibt ist jetzt mit 3 Marken vollständig belegt worden und die Anzahl der Marken ist minimal. (So etwas wie eine Induktionsverankerung)
- Es folgt die Diagonale $p_{k-2,1}$ bis $p_{k,3}$ von unten nach oben, wobei die erste Marke von $p_{k,1}$ stammt, die zweite neu ist und die dritte von $p_{k,2}$ genommen wird.
- Damit ist die 3-Pyramide unten links fertig mit 4 Marken.

Allgemein folgt, daß die Diagonale $p_{k-i+1,1}$ bis $p_{k,i}$ von unten nach oben gefüllt wird mit

- der Marke $p_{k-i+3,1}$
- einer neuen $(i+1)$-ten Marke und dann
- von unten nach oben mit den untersten (i-2) Elementen der Diagonalen $p_{k-i+2,1}$ bis $p_{k,i-1}$.

Es ist nun die linke untere i-Pyramide fertig, jeweils mit minimal vielen Marken nämlich $i+1$. Wiederholt man diese Schritte bis $i=k$, so hat man die k-Pyramide mit $k+1$ Marken abgedeckt, was zu verwirren ähhh zu beweisen war.

Zusatzfragen

Eine k-Pyramide hat $\frac{k(k+1)}{2}$ Knoten, von denen nach obigem Algorithmus jeder (bis auf die letzten $k+1$) einmal besetzt und einmal 'geleert' wird. Die letzten $k+1$ werden nur beseztz. Man erhält für die Anzahl der Züge:

$$Z_k = 2\frac{k(k+1)}{2} - (k+1) = k^2 + 1$$

Hat man beliebig viele Steine zur Verfügung, so kann man die Pyramide kanonisch zeilenweise von unten nach oben besetzen, ohne eine einzige Marke zu entfernen. In diesem Fall beläuft sich die Anzahl der Züge auf die Anzahl der Knoten:

$$Z_k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Aufgabe 2

Um die maximale Anzahl von nötigen Marken zu berechnen, muß man wissen, welches die ungünstigste Struktur für den gerichteten Graphen ist. Offensichtlich ist der Graph so zu wählen, daß einerseits die Anzahl der Kanten, die einen Knoten verlassen minimal (also gleich eins) ist, denn jede weitere aus einem Punkt p auslaufende Kante könnte dazu dienen, daß der Nachfolger von p entlang dieser Kante eher besetzt werden kann. Andererseits muß die Anzahl der einlaufenden Kanten maximal (also gleich k) sein, damit jeder Knoten möglichst lange durch viele nicht belegte Vorgänger 'blockiert' wird. Man erhält die Form eines Baumes der Höhe d, in dem jeder innere Knoten k Vorgänger hat und es k^d Blätter gibt, die alle Quellen sind.

Sei nun $k > 0$ beliebig aber fest vorgegeben. Der Beweis erfolgt über vollständige Induktion über d:

Verankerung $d = 1$

Wir erhalten in diesem Fall eine Wurzel mit k Vorgängern, die alle belegt werden müssen, bevor mit der $k+1$-ten Marke die Wurzel belegt werden kann.

$$K_d = k + 1 \leq (k-1)1 + 2 = k - 1 + 2 = k + 1$$

Induktionsschritt $d \Longrightarrow d + 1$

Wir haben nun einen Baum der Höhe $d+1$, der sich aus k Unterbäumen mit Wurzeln $r_1, \ldots, r_k$ der Höhe d zusammensetzt, die alle an der obersten Wurzel r hängen. Um die Wurzel r_1 zu besetzen braucht man K_d Marken. Um r_2 zu besetzen wiederum K_d (die alten vom Unterbaum der Wurzel r_1), allerdings muß die Marke bei r_1 liegen bleiben. Das bedeutet, daß jetzt insgesamt $K_d + 1$ Marken verbraucht sind. Wiederholt man diesen Schritt k mal, so hat man r_1 bis r_k besetzt *und* den gesamten Unterbaum von r_k. Nun kann man eine der $(K_d - 1)$ Marken aus dem Unterbaum unterhalb der Wurzel r_k benutzen, um die oberste Wurzel r zu belegen. Man braucht insgesamt:

$$K_{d+1} = K_d + k - 1 \leq (k-1)d + 2 + k - 1 = (k-1)(d+1) + 2$$

Damit gilt die Aussage für $d + 1$ und damit für alle d. Da weiterhin k als beliebig vorrausgesetz war, ist die Aufgabe bewiesen.